

تهیه و تنظیم: محبعلی جهانگیری

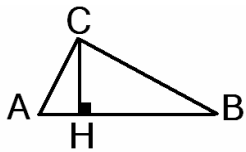
دبیر ریاضی ناحیه ۳ تبریز

مقدمه: به غیر از روشی که برای پیدا کردن اعداد گنگ (اصم) با استفاده از رابطه فیثاغورس گفته شده است، می توان از واسطه هندسی (میانگین هندسی) نیز استفاده کرده و اعداد گنگ (اصم) را روی محور مشخص کرد.

قبل از معرفی این روش، یک تعریف و یک قضیه را از هندسه یادآوری می کنیم.

تعریف واسطه هندسی (میانگین هندسی): هرگاه سه عدد حقیقی مثبت a, b, c تشکیل تصاعد هندسی بدهد b را واسطه هندسی (میانگین هندسی) a و c می گویند. بدیهی است اگر a, b, c تصاعد هندسی باشد. آنگاه $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ و از آنجا $b^2 = ac$

قضیه: فرض کنیم مثلث ΔABC مثلث قائم الزاویه ای باشد که در رأس C قائمه باشد و CH ارتفاع وارد بر وتر باشد در این صورت میانگین هندسی قطعات ایجاد شده روی وتر مثلث است. یعنی $CH^2 = AH \cdot HB$.



اثبات: دو مثلث قائم الزاویه ΔAHC و ΔBHC متشابه هستند زیرا اولاً $\angle C = \angle H = 90^\circ$ ثانیاً با توجه به اینکه زوایای $\angle A$ و $\angle C_1$

متمم های زاویه $\angle C_2$ هستند بنابراین $\angle A = \angle C_1$ و در نتیجه دو مثلث ΔAHC و ΔBHC متشابه هستند. و از آنجا نتیجه می شود:

$$\frac{CH}{AH} = \frac{HB}{CH} \Rightarrow CH^2 = AH \cdot HB$$

حال با استفاده از مطالب فوق، روشی برای نمایش اعداد گنگ روی محور اعداد حقیقی ارائه می دهیم.

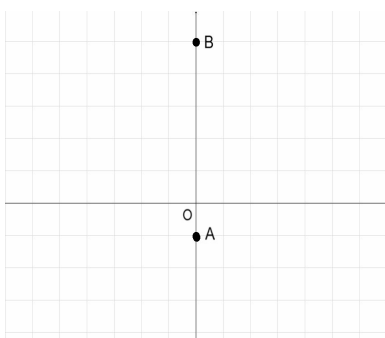
مطلب را با یک مثال شروع می کنیم:

مثال: $\sqrt{5}$ روی اعداد حقیقی محور نشان دهید.

ابتدا محورهای مختصات را رسم می کنیم.

روی محور افقی (محور y ها)، در سمت بالای مبدأ مختصات، ۵ واحد (نقطه ۵) و در سمت پایین آن، ۱ واحد (نقطه -۱) را جدا کرده و به

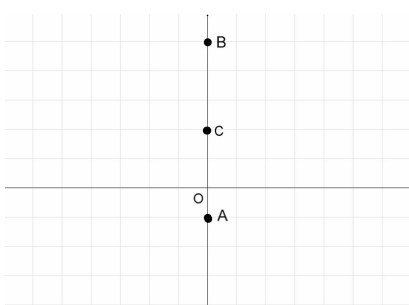
ترتیب آن نقاط را A و B می نامیم. (روشن است که فاصله بین دو نقطه A و B برابر ۶ است).



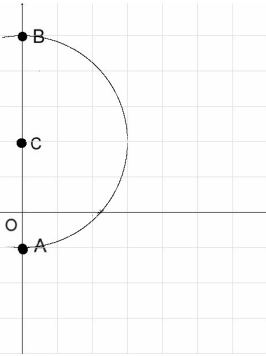
وسط دو نقطه A و B را که روی محور y ها قرار دارد پیدا می کرده آنرا C می نامیم. (بدیهی است که وسط نقاط A و B ، نقطه

$$C\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{0-0}{2}\right) = C(2, 0)$$

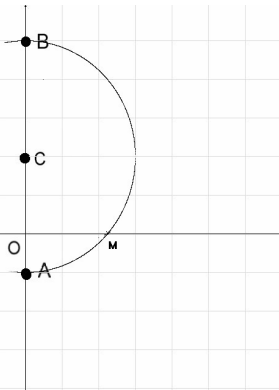
(خواهد بود).



دهانه پرگار را به اندازه ی ۳ واحد (نصف فاصله بین دو نقطه A و B) باز کرده و از نقطه C کمانی به شعاع ۳ می زنیم . مسلماً باتوجه به اینکه $AC = CB = 3$ لذا این کمان از دو نقطه ی A و B می گذرد.

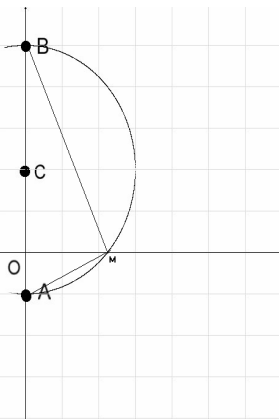


این کمان محور افقی (محور Xها) را در نقطه ای مانند M قطع خواهد کرد.



ادعا می کنیم، نقطه M همان $\sqrt{5}$ است.

نقطه M را به نقاط A و B وصل می کنیم. زاویه M محاطی است و چون روبرو به قطر دایره است 90° است.



پس ارتفاع وارد بر وتر مثلث ΔAMB است و می تواند واسطه هندسی برای قطعاتی که روی وتر ساخته شده باشد.

یعنی: $MO^2 = AO \times OB$ و چون $AO = 1$ و $BO = 5$ بنابراین $MO^2 = 1 \times 5$ و از آنجا $MO = \sqrt{5}$.

بنابراین ما توانستیم روی محور Xها نقطه $\sqrt{5}$ را با استفاده از واسطه هندسی پیدا کردیم.

در حالت کلی برای پیدا کردن \sqrt{n} روی محور اعداد حقیقی (که در آن n مجذور کامل نیست) به روش واسطه هندسی به روش زیر عمل می کنیم:

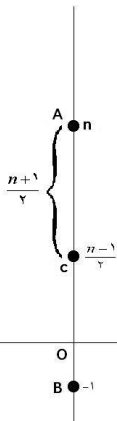
۱) محورهای مختصات را رسم می کنیم.

۲) روی محور افقی (محور y ها)، در سمت بالای مبدأ مختصات، n واحد (نقطه n) و در سمت پایین آن، 1 واحد (نقطه -1) را جدا کرده و به ترتیب آن نقاط را A و B می نامیم. (روشن است که فاصله بین دو نقطه A و B برابر $n+1$ است).



بنابراین مختصات نقطه A برابر $(0, n)$ و مختصات نقطه B برابر $(0, -1)$ خواهد بود.

۳) وسط نقاط A و B را که روی محور y ها قرار دارد پیدا کرده و آنرا نقطه C می نامیم.

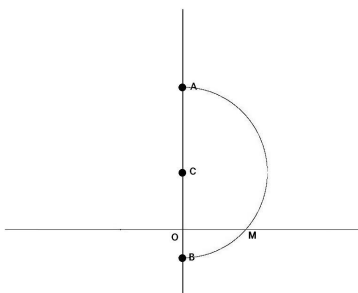


بدیهی است که مختصات نقطه C برابر $(0, \frac{n-1}{2})$ می باشد و با توجه به اینکه C وسط دو نقطه A و B است، بنابراین:

$$AC = CB = \frac{n+1}{2}$$

۴) قوسی به مرکز $C(0, \frac{n-1}{2})$ و به شعاع $AC = CB = \frac{n+1}{2}$ (نصف فاصله بین دو نقطه A و B) و در جهت

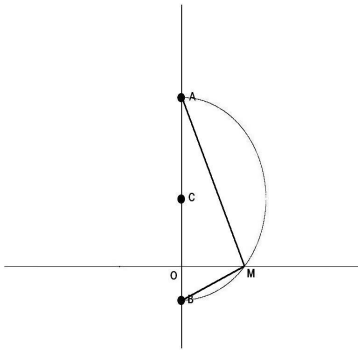
مثبت محور x ها، رسم می کنیم.



این قوس محور x ها را در نقطه ای مانند M قطع خواهد کرد.

۵) نقطه M روی محور x ها، همان \sqrt{n} است.

زیرا اگر از نقطه M به نقاط A و B وصل می کنیم، زاویه M محاطی است و چون روبرو به قطر دایره است 90° است.



پس ارتفاع وارد بر وتر مثلث ΔAMB است و می تواند واسطه هندسی برای قطعاتی که روی وتر ساخته شده باشد.

یعنی: $MO^2 = AO \times OB$ و چون $AO = 1$ و $BO = n$ بنابراین $MO^2 = 1 \times n$ و از آنجا $MO = \sqrt{n}$.